偏心凸轮静平衡的数学方法

王　一　耕

（上海工程技术大学纺织学院）

【摘要】 本文以Z304经编机中的偏心凸轮为例，介绍有关如何保证凸轮零件达到静平衡要求的数学方法。它对其他形状的偏心轮的设计有同样的参考价值。

偏心凸轮在机械设计中广泛应用。我国自行设计的Z303和Z304型经编机的编织部件就是通过连杆由偏心凸轮带动的。未校好静平衡的偏心凸轮，运转时就会使机器发生震动，车速越高，震动越大，并会使凸轮轴发生弯曲变形，影响整机精度质量。在Z304型经编机的动力输入轴上共套有16只偏心凸轮，设计速为1000转/分，如不解决好每只凸轮自身的静平衡问题，要提高车速是不可能的。

解决偏心凸轮自身的静平衡一般是在凸轮精加工完成后，再增加一道校静平衡工序。将偏重的一头钻些孔，若又偏轻时就再将熔化的铅或其他金属滴进孔里，反复用这样的方法来处理，劳动强度高，费时多。零件表面也将布满麻点，很不美观。

在Z304型经编机里，用计算方法使凸轮铸件按计算尺寸精加工，就能保证零件的静平衡要求，缩短了工序，提高了零件的质量，经实践证明，这方法是正确有效的。本文就以Z304型经编机中的偏心凸轮为例，介绍这种计算方法。本方法对其他形状的偏心凸轮的设计同样有参考价值。

在给出具体的计算方法前，先说明两点：

1．本文中的长度单位为毫米。

2．凡有固定下标的字母都是已知数或是可求的数。

图1中，(1)偏心为 ε_1 的挖去一块弯月形的圆盘部分，和(2)偏心为 ε_2 的高为 l_2 的圆锥台部分，组成一偏心凸轮。在设计时，要求圆锥台的小头直径为 $2R_5$，大头直径为 $2R$，同时需满足 $2R_5<2R<4R_0$ 在校平衡时，需将两个直径为 $2R_6$ 孔中的锁紧块装上，用螺丝将偏心凸轮紧锁在直径为 $2R_0$ 的主轴上。测得锁紧块和螺丝的总质量为 m_0 克。设偏心凸轮的体密度（ρ_0）是均匀的，且 $\rho_0=7.8$。

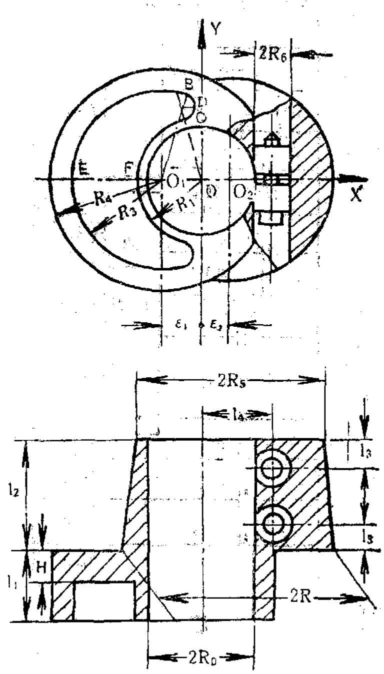

图1　Z304型经编机偏心凸轮

在图1正视图上取定座标系 XOY，使座标原点 O 在主轴的轴心上。圆盘部分对轴心 O 的矩为 M_1，从图中可见，M_1 的大小与挖去弯月形的深浅或厚度 H 有关。当 H 值越大，圆盘左侧的质量越大，它对 O 点的矩 M_1 也越大，可将该矩 M_1 表达为 H 的函数，即 $|M_1|=f(H)$。

又设 ε_2 为偏心，以 $2R$ 和 $2R_5$ 为大小头直径，以 l_2 为高的圆锥台（也称配重圆锥台）对 O 点的矩为 M_2（包括锁紧块和螺钉），则当 $2R_5$，l_2 固定后，M_2 的大小与大头直径 $2R$ 有关，

故可将 M_2 表达为 R 的函数，即 $|M_2|=g(R)$。

要得到静平衡状态，需要 $|M_1|=|M_2|$。即应有 $f(H)=g(R)$，由此可得 $F(H,R)=0$ 的方程。从而可定出 H 和 R 的合理尺寸。因此，解决此问题的关键是如何建立 $|M_1|=f(H)$ 和 $|M_2|=g(R)$ 的函数关系式。

一、$|M_1|=f(H)$ 关系式的建立

偏心为 ε_1 的圆盘可看成在半径为 R_4，厚 l_1 的扁圆柱内挖去一块厚度为 (l_1-H) 的弯月形后而形成的。它们对 O 点矩相应各为 M_a 和 M_b，则显然可知，$|M_1|=|M_a|-|M_b|$. 而 $|M_a|=l_1\pi R_4^2\rho_0\varepsilon_1=\pi\rho_0\varepsilon_1 l_1 R_4^2$。

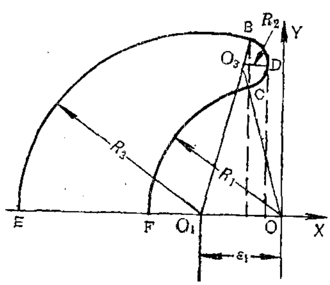

图 2 弯月形上部放大的图形

然后再求 $|M_b|$，先将图 1 中的弯月形取其上半部适当放大成图 2。求 $\widehat{EB}$、$\widehat{BD}$、$\widehat{DC}$ 和 $\widehat{CF}$ 的方程和图中点 O_3、点 B、点 D、点 C 的坐标 $(x_3,\ y_3)$、$(x_B,\ y_B)$、$(x_D,\ y_D)$。和 (x_C,y_C)。由图 2 所给尺寸可看出 (1) O_3 的坐标 $(x_3,\ y_3)$ 可从下列联立方程解出：

$$\begin{cases}(x-\varepsilon_1)^2+y^2=(R_3-R_2)^2\\ x^2+y^2=(R_1+R_2)^2\end{cases}\tag{1}$$

(2) B 是 O_1O_3 的外分点，设 $\lambda_1=-(O_1B/BO_3)=-(R_3+R_2)/R_2$，则有：

$$\begin{cases}x_B=(x_1+\lambda_1x_3)/(1+\lambda_1)=(-\varepsilon_1+\lambda_1x_3)/(1+\lambda_1)\\ y_B=(y_1+\lambda_1y_3)/(1+\lambda_1)=\lambda_1y_3/(1+\lambda_1)\end{cases}\tag{2}$$

上式中 x_1，y_1 是 O_1 点的座标，由图 2 可知，$x_1=-\varepsilon_1$，$y_1=0$；x_3,y_3 已由 (1) 式求出。

(3) 由于 C 是 OO_3 的内分点，设 $\lambda_2=OC/CO_3=R_1/R_2$，则有：

$$\begin{cases}x_c=(x_0+\lambda_2x_3)/(1+\lambda_2)=\lambda_2x_3/(1+\lambda_2)\\ y_c=(y_0+\lambda_2y_3)/(1+\lambda_2)=\lambda_2y_3/(1+\lambda_2)\end{cases}\tag{3}$$

上式中 x_0，y_0 是座标原点的座标，故其值为零。

(4) 图 2 中 D 点的座标应是

$$x_D=x_3+R_2,\quad y_D=y_3\tag{4}$$

(5) 由图 2 可见：$y_{\widehat{EB}}=\sqrt{R_3^2-(x-\varepsilon_1)^2}$；$y_{\widehat{FC}}=\sqrt{R_1^2-x^2}$；$y_{\widehat{BD}}=y_3+\sqrt{R_2^2-(x-x_3)^2}$；$y_{\widehat{DC}}=y_3-\sqrt{R_2^2-(x-x_3)^2}$。

有了以上的准备，就可求弯月形对 O 点之矩（由于凸轮的正视图对 OX 轴对称，只需考虑在 OX 轴上方的半个弯月形对 O 点之矩，然后加倍即可）。

$$M_b=2\rho_0(l_1-H)(I_1-I_2+I_3)\tag{5}$$

其中：$I_1=\int_{xE}^{xB}x\sqrt{R_3^2-(x-\varepsilon_1)^2}\,dx$；

$x_E=-(\varepsilon_1+R_3)$；$I_2=\int_{xF}^{xC}x\sqrt{R_1^2-x^2}\,dx$；

$x_F=-R_1$

$$I_3=2\int_{xB}^{xD}x(y_3+\sqrt{R_2^2+(x-x_3)^2}\,dx$$

由此，求出：$|M_1|=|M_a|-|M_b|$

$$=\pi\rho_0\varepsilon_1l_1R_4^2-2\rho_0(l_1-H)(I_1-I_2+I_3)\tag{6}$$

在上式右端的第一项中，所有有下标的字母都是已经给定的常数，第二项中 ρ_0 和 l_1 是已给定的常数，而 I_1，I_2，I_3 可通过积分求出，只有 H 是变量，可见 $|M_1|$ 是 H 的函数，即 $|M_1|=f(H)$。

由于 $|M_a|$ 和 $|M_b|$ 的计算结果都为正数，故在等式 (6) 的右端取消了绝对值的符号。

二、$|M_2|=g(R)$ 关系式的建立

设配重圆锥台在未打直径为 $2R_6$ 的孔时，其体积为 v_c，它的质量中心必然在它自身的中心轴上，从图 1 的正视图上看，它应该在与座标原点的距离为 ε_2 的通过 O_2 垂直于 XOY 平面的轴线上。设未打孔的配重圆锥台对 O 点的距为 M_C，则应有：$M_C=\rho_0v_c\varepsilon_2$。

参见图 1 中的俯视图，圆锥台体积为：$v_c=(1/3)\pi l_2(R^2+R_5^2+R_5R)$，由此可得：

$$M_c=\pi\rho_0\varepsilon_2l_2(R^2+R_5^2+R_5R)/3\tag{7}$$

又设当凸轮装上锁紧块后，两个半径为 R_6 的孔中剩下的体积为 v_e，它的质量中心与

转动轴线的距离应为 l_4(参见图1)。设 v_d 对 O 点之距为 M_d，则装锁紧块后的配重圆锥台对 O 点的矩应该是：

$$|M_2| = |M_c| - |M_d| \tag{8}$$

(8)式中的 M_c 由(7)式可定，要求 $|M_2|$，关键在求出 M_d。

设两个半径为 R_6 的孔的总体积为 v_{d1}，锁紧块和锁紧螺的总质量为 m_0，则从图1所给出的尺寸中可推算出两个半径为 R_6 的圆孔的总高度

$$h = 2[\sqrt{R^2-(l_4-\varepsilon_2)^2}+\sqrt{R_5^2-(l_4-\varepsilon_2)^2}],$$

从而得到：

$$v_{d1} = \pi R_6^2 h = 2\pi R_6^2[\sqrt{R^2-(l_4-\varepsilon_2)^2} + \sqrt{R_5^2-(l_4-\varepsilon_2)^2}] \tag{9}$$

$$\therefore \quad M_d = \rho_0 v_{d1} l_4 - m_0 l_4 = l_4[2\pi R_6^2\rho_0(\sqrt{R^2-(l_4-\varepsilon_2)^2} + \sqrt{R_5^2-(l_4-\varepsilon_2)^2} - m_0] \tag{10}$$

最后得到：

$$|M_2| = |M_c| - |M_d| = (\pi/3)\rho_0\varepsilon_2 l_2(R^2+R_5^2+R_5R) - l_4[2\pi R_6^2\rho_0(\sqrt{R^2-(l_4-\varepsilon_2)^2} + \sqrt{R_5^2-(l_4-\varepsilon_2)^2}) - m_0] \tag{11}$$

由于上式中的每一项的结果都是正数，故可不加绝对值符号。

在等式(11)中的右端除去字母 R 是变量外，其余字母都是已给定的数，显然 $|M_2|$ 是变量 R 的函数。从而建立了关系式 $|M_2| = g(R)$。

三、建立 $F(H,R)=0$ 的关系式

由静平衡要求，需有 $|M_1| = |M_2|$，根据等式(6)和等式(11)，并消去 ρ_0，经整理得到恒等式(12)：

$$[\pi\varepsilon_2 l_2(R^2+R_5^2+R_5R)/3] - l_4[2\pi R_6^2(\sqrt{R^2-(l_4-\varepsilon_2)^2} + \sqrt{R_5^2-(l_4-\varepsilon_2)^2} - m_0/\rho_0] = \pi\varepsilon_1 l_1 R_4^2 - 2(l_1-H)(I_1-I_2+I_3) \tag{12}$$

在式(12)中，除字母 R 和 H 是变量外，其他字母都是已经给定的常数或是可求出的常数，这就建立了 $F(H,R)=0$ 的函数关系式。

四、实际数据和结论

在实际设计此偏心凸轮时，除 H 和 R 待定(根据式(12)确定)外，其他给出了下列数据：$R_0=25$；$R_1=30$；$R_2=5$；$R_3=40$；$R_4=50$；$R_5=42$；$R_6=8$；$l_1=31$；$l_2=50$；$l_3=12$；$l_4=30$；$\varepsilon_1=18$；$\varepsilon_2=12$；$\rho_0=7.8$；$m_0=112$ 克。

用上述数据，由式(1)～(4)可相应求得：$(x_3, y_3)=(-9, 33\cdot82)$；$\lambda_1=-8$；$\lambda_2=6$；$(x_B, y_B)=(-54/7, 38.65)$；$(x_c, y_c)=(-54/7, 28.99)$；$(x_D, y_D)=(-4, 33.82)$；用式(5)和上面求得的数值及已给定数据，可求得：$I_1=-49184.05$；$I_2=-8123.33$；$I_3=-163.54$。

将所得数值代入式(12)，整理得：

$$R^2+42R-19.2\sqrt{R^2-324} = 113.29H+1183.79 \tag{13}$$

取 $R=47$ 代入式(13)，得到 $H=16.11$。

最后，在图1中，确定偏心凸轮的配重圆台的大头直径为 $2\times47=94$，圆柱盘中的 $H=16+0.10$，按这一要求设计出凸轮投入生产，铸件采用石腊浇铸。在按图纸完成了精加工后，将每只凸轮进行静平衡试验，全部合格。这就证明了所建立的数字模型是正确的。

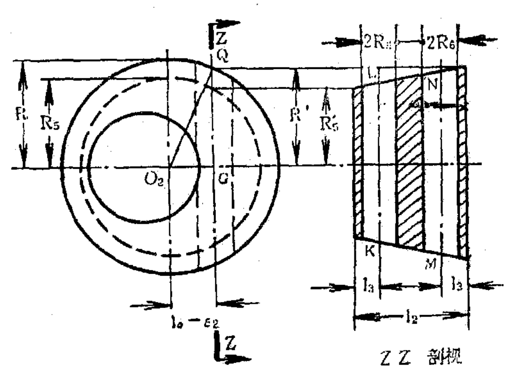

图 3　配重圆台图

附注：我们将图1中的配重圆锥台保持原来的尺寸符号画成图3，由图3可见，两个半径为 R_6 的孔的总高为 $h=KL+MN=2R'+2R_5'=2[\sqrt{R^2-(l_4-\varepsilon_2)^2}+\sqrt{R_5^2-(l_4-\varepsilon_2)^2}$。